Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachten wir die drei Riemannschen Metriken: $B := B_{\text{Euklidisch}}, B' := \frac{1}{r^2} B_{\text{Euklidisch}}, B'' := \frac{1}{r^4} B_{\text{Euklidisch}}$. Hier ist $r : U \to \mathbb{R}$ die Funktion $p \in U \mapsto r(p) := \sqrt{x(p)^2 + y(p)^2}$. Seien X, Y die Vektorfelder $X_p = p, Y_p = (y(p), -x(p))$. Berechne $[X, Y]_{\text{Lie}}$. Es gilt $Xr = 1, Yr = 0$. Existiert, lokal oder global auf U, eine Funktion $\theta : U \to \mathbb{R}$ mit $X\theta = 0, Y\theta = 1$? Berechne die isometrische kovariante Ableitung $\nabla, \nabla', \nabla''$ ohne Torsion für B, B', B''. (Hinweis: setze $E_1 = aX, E_2 = bY$, $a, b : U \to \mathbb{R}$ Funktionen, so, dass die Vektorfelder E_1, E_2 orthonormiert bezüglich B, B', B'' sind, und berechne Funktionen $\Gamma^k_{i,j} : U \to \mathbb{R}$ mit $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{i,j} E_k$.) Berechne für B, B', B' die Länge der Kurve $K_R := \{p \in U \mid r(p) = R\}, R \in \mathbb{R}, R > 0$. Zeichne metrisch treu $(U, B), (U, B'), (U, B'')$.

Aufgabe 2. Sei $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ die Translation $p \mapsto T(p) := p + 2\pi e_1$. Auf $\mathbf{H} := \{p \in \mathbf{R}^2 \mid y(p) > 0\}$ arbeiten wir mit der Metrik $B := \frac{1}{y^2} B_{\text{Euklidisch}}$. Sind $\mathbf{H}/T$ und (U, B'') isometrisch?

Beispiel 1. Sei $\mathbf{H} := \{p \in \mathbf{R}^2 \mid y(p) > 0\}$ mit $B := \frac{1}{y^2} B_{\text{Euklidisch}}$. Sei $E_1 = y\frac{\partial}{\partial x}$ und $E_2 := y\frac{\partial}{\partial y}$. Die Vektorfelder E_1, E_2 sind bezüglich B orthonormiert. Es gilt: $[E_1, E_2]_{\text{Lie}} = -E_1$. Die Funktionen $c^k_{i,j}$ mit

$$[E_i, E_j]_{\text{Lie}} = c^k_{i,j} E_k$$

sind hier konstant und gegeben durch:

$$c^1_{1,2} = -c^1_{2,1} = -1, c^k_{i,i} = c^2_{i,j} = 0$$

Mit dem Hexagon von Einstein erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j} = \frac{1}{2}(c^k_{i,j} - c^i_{j,k} - c^j_{i,k})$$

Es folgt:

$$\Gamma^1_{1,2} = -1, \Gamma^2_{1,1} = 1, 0 = \Gamma^1_{1,1} = \Gamma^2_{2,2} = \Gamma^1_{2,1} = \Gamma^1_{2,2} = \Gamma^2_{2,1} = \Gamma^2_{1,2}$$

und

$$K(E_1, E_2)(E_2) := ([\nabla_{E_1}, \nabla_{E_2}]_{\text{Operator}} - \nabla_{[E_1,E_2]_{\text{Lie}}})(E_2) = -E_1$$

Die Schnittkrümmung ist konstant $-1 := B(K(E_1, E_2)(E_2), E_1)$.

Beispiel 2. Nochmals $\mathbf{H} := \{p \in \mathbf{R}^2 \mid y(p) > 0\}$ mit $B := \frac{1}{y^2} B_{\text{Euklidisch}}$, aber wir rechnen bezüglich den Vektorfelder $E_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ und $E_2 := \frac{\partial}{\partial y}$. Nun gilt:

$[E_1, E_2]_{\text{Lie}} = 0$. Die Christoffelsymbole bezüglich das nicht orthonormierte Paar E_1, E_2 von Koordinatenvektorfeldern ist durch

$$\Gamma^k_{i,j} = \frac{1}{2} g^{k,m} (d_{E_j} g_{m,i} + d_{E_i} g_{m,j} - d_{E_m} g_{i,j})$$

gegeben, wobei $g_{i,j} := B(E_i, E_j)$ ist. Die Matrix $(g_{i,j})$ ist die Matrix des Skalarproduktes B bezüglich E_1, E_2. Die Koeffizienten $g^{i,j}$ erfüllen $g^{m,i} g_{i,j} = \delta^i_j$. Wir erhalten:

$$\Gamma^1_{1,1} = \Gamma^1_{2,2} = 0, \Gamma^1_{1,2} = \Gamma_{2,1} = \frac{-1}{y}$$

$$\Gamma^2_{1,1} = -\Gamma^2_{2,2} = \frac{1}{y}, \Gamma^2_{1,2} = \Gamma^2_{2,1} = 0$$

Für die Krümmungform K^∇, eingesetzt E_1, E_2 und angewandt auf E_1, erhalten wir

$$[\nabla_{E_1}, \nabla_{E_2}] E_1 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_1 = [\nabla_{E_1}, \nabla_{E_2}] E_1 = \frac{1}{y^2} E_2$$

Für die orthonormierten Vektoren $X := yE_1, Y := yE_2$ erhalten wir $K^\nabla(X, Y)(X) = -Y$, somit ist die Schnittkrümmung wiederum konstant -1.