Prof. N. A'Campo Lenzsemester 2009

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $(E,+)$ eine kommutative Gruppe. Sei $\mathrm{Abb}(E)$ die Menge der Abbildungen von E nach E. Für $A,B \in \mathrm{Abb}(E)$ sei $[A,B]_E : E \to E$ die Abbildung $p \in E \mapsto A \circ B(p) - B \circ A(p) \in E$. Zeige, dass die Klammer $[\, ,\,]_E$ die Jacobi Identität erfüllt:

$$[[A,B]_E,C]_E + [[B,C]_E,A]_E + [[C,A]_E,B]_E = 0,\ A,B,C \in \mathrm{Abb}(E)$$

Aufgabe 2. Sei U eine offene Teilmenge in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension V. Sei $E := C^\infty(U,\mathbb{R})$ die additive Gruppe aller beliebig oft differenzierbaren Funktion auf U. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : E \to E$ heisst Derivation auf U, falls für alle $f,g \in E$ die Leibnitzregel gilt:

$$A(fg) = A(f)g + fA(g)$$

Sei k eine konstante Funktion. Zeige: $A(k) = 0$. Hinweis: $A(1) = A(1^2) = 1A(1) + A(1)1 = 2A(1)$. Zeige, dass für jede Derivation A auf U eindeutig ein beliebig oft differenzierbares Vektorfeld $R_A : U \to V$ existiert, derart, dass gilt: $R_A f = A(f), f \in E$. Hier ist $R_A f$ die Abkürzung für $i_{R_A} df$, d.h. für die Funktion, die man erhält, indem man im Differential df von f das Vektorfeld R_A einsetzt. Hinweis: Wähle eine Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$ für V und erhalte dazu die Koordinatenfunktionen $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Setze $R_A = A(x_1)e_1 + A(x_2)e_2 + \cdots + A(x_n)e_n$. Schliesse mit Aufgabe 3 zu $A(f)(p) = (df)_p((R_A)_p)$.

Aufgabe 3. Zeige für $p \in U, f \in E$ eine Entwicklung:

$$f(p+h) = f(p)+(Df)_p(h)+(x_1(p+h)-x_1(p))g_1(p+h)+\cdots(x_n(p+h)-x_n(p))g_n(p+h)$$

mit $g_1, \cdots, g_n \in E, g_1(p) = g_2(p) = \cdots = g_n(p) = 0$. Hinweis:

$$f(p+h) - f(p) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p+th)dt =$$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i(h)(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p+th) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p))dt =$$

$$(Df)_p(h) + \sum_{i=1}^n (x_i(p+h) - x_i(p)) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p+th) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)dt$$

Aufgabe 4. . Seien A,B Derivationen auf U. Zeige, dass $[A,B]_E$ eine Derivation auf U ist. Sind X,Y C^∞-Vektorfelder auf U, dann $f \in E \mapsto Xf \in E$, $f \in E \mapsto Yf \in E$, $[X,Y]_E : f \in E \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))f \in E$ Derivationen.

Aufgabe 5. Seien X, Y C^∞-Vektorfelder auf U. Definiere die Liesche Klammer $[X,Y]_{\text{Lie}}$ mit $[X,Y]_{\text{Lie}} := R_{[X,Y]_E}$. Zeige für die Liesche Klammer von Vektorfeldern die Jacobi Identität.

Aufgabe 6. Seien X, Z C^∞-Vektorfelder auf U. Wir nehmen an, dass das Feld X ohne Nullstellen ist. Zeige, dass lokal auf U ein Vektorfeld Y mit $[X,Y]_{\text{Lie}} = Z$ existiert. Existiert Y auch global auf U.

Aufgabe 6. Seien X, Y zwei Vektorfelder und f, g zwei Funktionen auf $\mathbb{R}^2$. Wir nehmen an, dass gelten:

$$Xf = 1, Yf = 0, Xg = 0, Yg = 1$$

Berechne $[X,Y]_{\text{Lie}}$. Zeige, dass das Paar (X,Y) eindeutig durch das Paar (f,g) bestimmt ist. Wir notieren X mit $\frac{\partial}{\partial f}$ und Y mit $\frac{\partial}{\partial g}$. Zeige, dass $\frac{\partial}{\partial f}$ von f UND von g abhängt. Also, f bestimmt $\frac{\partial}{\partial f}$ NICHT.

Aufgabe 7. Sei $\omega : p \in U \mapsto \omega_p \in \text{Hom}(V, \text{End}(V))$ beliebig oft differenzierbar. Zeige, dass $\nabla_X Y := i_X dY + i_X \omega(Y)$ eine kovariante Ableitung auf U definiert. Also, $(\nabla_X Y)_p := (dY)_p(X_p) + (\omega_p(X_p))(Y_p)$. Hier ist dY das Diffferential der Abbildung $Y : U \to V$.

Aufgabe 8. Sei $\times$ das Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Sei Z das Vektorfeld

$$Z = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Dann definiert $\nabla_X Y = i_X dY + Z \times X \times Y$ eine kovariante Ableitung auf $\mathbb{R}^3$. Bestimme die 8 zweimal differenzierbaren Kurven $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ und mit $\gamma(0) = \dot\gamma(0) = (\pm1, \pm1, \pm1) \in \mathbb{R}^3$.

Die Kurven $\gamma : \mathbb{R}{\geq 0} \to \mathbb{R}^3$ mit $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ und $||\gamma(0)||_{\text{Euklidisch}} = 1$ könnten Inspiration für eine Larve sein.