Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Analysis und Geometrie I.

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei E die Euklidische Ebene. Für $u, v \in E$ mit $D(u, v) = 1$ und $a := (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ sei V_a die Teilmenge in E^{n+1} aller $p := (p_0, p_2, \cdots, p_n)$ mit $p_0 = u, p_n = v$ und $D(p_i, p_{i-1}) = a_i, i = 1, 2, \cdots n$, wobei D die Distanz auf E ist. Zeige für $n > 1$ die Existenz eines $b > 0$, derart, dass $V_a, a = (1/n + b, 1/n + b, \cdots, 1/n + b) \in \mathbb{R}^n$, homöomorph zur Sphäre S^{n-2} ist.

Aufgabe 2. Wähle für $n = 4$ ein $a \in \mathbb{R}^4$ mit V_a homöomorph zur disjunkten Vereinigung von zwei Kopien von $S^1 \times S^1$.

Aufgabe 3. Wähle für $n = 4$ ein $a \in \mathbb{R}^4$ mit V_a homöomorph zur Fläche von Geschlecht 2. Die Oberfläche einer "8" aus Schokolade ist eine Fläche von Geschlecht 2.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Zeige, dass $f(\mathbb{R})$ keine nichtleere offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ enthält.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ stetig. Konstruiere eine stetige Abbildung $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2$, die auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ beliebig oft differenzierbar ist und deren Einschränkung auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ gleich f ist.

Aufgabe 6. Sei T der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren komplexen Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}$. Die Zuordnungen $\delta : \phi \in T \mapsto \phi(0) \in \mathbb{C}, \delta' : \phi \in T \mapsto -\phi'(0) \in \mathbb{C}, \delta'' : \phi \in T \mapsto \phi''(0) \in \mathbb{C}, \cdots$ sind Linearformen auf T. Für $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $L_{s,k}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\sqrt{-1}x^k} \phi(x) dx$. Zeige, dass der Grenzwert $\lim_{s \to +\infty} L_{s,k}$ im schwachen Sinne gleich einer Linearkombination der Linearformen $\delta, \delta', \delta'', \cdots, \delta^{(k-2)}$ ist.