Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Analysis und Geometrie I.

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Finde auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbare Koordinaten $u = u(x,y,z), v = v(x,y,z), w = w(x,y,z)$ derart, dass die durch $f(x,y,z) = xy + yz + xz + x^3 + y^3 + z^3$ gegebene Funktion auf $\mathbb{R}^3$ spaltet in $f(x,y,z) = u(x,y,z)^2 - v(x,y,z)^2 + g(w(x,y,z))$, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ ist.

Aufgabe 2. Finde eine Morse-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x+1, y) = f(x, y+1) = f(x, y)$. Konstruiere die Funktion f mit 3 kritischen Werten.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion mit $f(p + u) = f(p)$ für $p \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{Z}^n$. Zeige, dass f endlich viel kritische Werte hat.

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Konstruiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n+1$ kritischen Werten.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Kurve. Wir nehmen an, dass die Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto x(f(t)) \in \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion ist. Finde $p \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{R})$ derart, dass die Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{(x(f(t)) - x(p))^2 + (y(f(t)) - y(p))^2} \in \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion ist.

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve und sei $p \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $t \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i(f(t)) - x_i(p))^2} \in \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion ist. Konstruiere lineare Koordinaten $u_1, u_2, \cdots, u_n$ auf $\mathbb{R}^n$ derart, dass die Funktionen $t \in \mathbb{R} \mapsto u_i(f(t)) \in \mathbb{R}$ Morse-Funktionen sind.