Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Analysis und Geometrie I.

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Konstruiere in $\mathbb{R}$ einen Raum K mit unendlich viele Punkten, so dass K kompakt und topologisch homogen ist. Ein topologischer Raum X heisst topologisch homogen, wenn für $x, y \in X$ ein Homöomorphismus $f : X \to X$ mit $f(x) = y$ existiert.

Aufgabe 2. Sei X ein Vektorfeld auf $T := S^1 \times S^1$ für das jede Lösungskurve in T dicht ist. Konstruiere eine einfach geschlossenen Kurve S auf T, so dass X und S nirgendwo tangent sind. Zeige, dass S jede Bahn des Vektorfeldes X trifft. Zeige, dass das Vektorfeld X topologisch ähnlich zu einem invarianten Vektorfeld ist.

Aufgabe 3. Sei X ein kompakter metrischer Raum. Sei R der Ring aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Sei $m \subset R$ ein maximales Ideal in R. Zeige, dass ein $p \in X$ mit $m = \{f \in R \mid f(p) = 0\}$ existiert. Hinweis: Für $f \in R$ sei $N_f \subset X$ die Menge der Nullstellen von f. Zeige, dass für jede endliche Teilmenge $I \subset m$ der Durchschnitt $\cap_{f \in I} N_f$ nicht die leere Menge ist. Schliesse, dass $\cap_{f \in m} N_f$ nicht die leere Menge ist. Zeige: $\# \cap_{f \in m} N_f = 1$.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Rekonstruiere aus den Ring R den topologischen Raum X. Kann man aus den Ring R die Metrik rekonstruieren?

Aufgabe 5. Seiein $K, K' \subset \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 1. Zeige, dass K und K' homöomorph sind. Gibt es notgedrungen einen Homömorphismus F von $\mathbb{R}$ mit $F(K) = K'$?

Aufgabe 6. Konstruiere einen Homöomorphismus $f : S^1 \to S^1$ ohne periodische Punkte, so dass für ein $x \in S^1$ die Bahn $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht dicht in S^1 ist. Zeige, dass für jedes $x \in S^1$ der Bahnabschluss in S^1 homöomorph zu dem Raum K der vorherigen Aufgabe ist.