Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Analysis und Geometrie I.

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\langle X_v, X_v \rangle = \langle v, v \rangle$ und $\langle v, X_v \rangle = 0, v \in \mathbb{R}^n$. Für $t \in \mathbb{R}$, sei $F_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $v \in \mathbb{R}^n \mapsto v + tX_v \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass für $0 \leq t \leq \epsilon$ die Abbildung F_t ein Diffeomorphismus von $R := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} \leq \langle v, v \rangle \leq 2\}$ auf $R_t := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1+t^2}{2} \leq \langle v, v \rangle \leq 2(1 + t^2)\}$ definiert.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Zeige, dass

$$t \in \mathbb{R} \mapsto I_t := \int_R \text{Jacobische}(F_t) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \in \mathbb{R}$$

eine polynomiale Abbildung ist.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Für $0 \leq t \leq \epsilon$ zeige:

$$I_t = \int_{R_t} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = (1 + t^2)^{\frac{n}{2}} \int_R dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Schliesse, dass n gerade ist.

Aufgabe 4. Sei n ungerade. Sei $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\langle v, X_v \rangle = 0, v \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass X auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Nullstelle hat.

Aufgabe 5. Sei m gerade. Zeige, dass ein stetiges Vektorfeld auf S^m eine Nullstelle hat. Siehe Amer. Math. Monthly, 85 (1978), 521–524.

Aufgabe 6. Sei $D := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, v \rangle \leq 1\}$. Wir nehmen an, dass $F : D \to D$ stetig differenzierbar und ohne Fixpunkte ist. Für $v \in D$, sei $t_v \in \mathbb{R}, t_v \geq 0$, so dass $F(v) + t_v(v - F(v)) \in \partial D$ zutrifft. Definiere $G : D \to \partial D$ mit $G(v) = F(v) + t_v(v - F(v))$. Zeige, dass G differenzierbar ist. Es gilt $G(v) = v$ für $v \in \partial D$.

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Schreibe $G = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$, wobei $g_i = x_i \circ G$ ist. Folgendes ist widersprüchlich:

$$0 \neq \int_D dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{\partial D} x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n =$$

$$\int_{\partial D} g_1 dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_n = \int_D dg_1 \wedge dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_n = 0$$

aber alle = stimmen!

Aufgabe 8. Sei $F : D \to D$ stetig. Zeige, dass F einen Fixpunkt hat.