Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Analysis und Geometrie I.

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei ω auf einer offenen Menge U in $\mathbb{R}^n$ eine beliebig oft differenzierbare 1-Differentialform. Sei $p \in U$. Wir nehmen an: $\omega_p \neq 0$. Konstruiere unendlich viele 1-Differentialformen auf U, die lokal um p paarweise nicht differenzierbar konjugiert sind.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Wir nehmen an: $\omega_p \neq 0$ und $d\omega = 0$. Zeige, dass es lokal um p differenzierbare Koordinaten $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ mit $\omega = dx_1$ gibt.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Wir nehmen an: $\omega_p \neq 0$ und $(d\omega \wedge \omega)_p \neq 0$. Weiter sei $n = 3$. Zeige, dass es lokal um p differenzierbare Koordinaten (x, y, z) mit $\omega = xdy + dz$ gibt.

Aufgabe 4. Existiert auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Funktion f mit $df = xdy - ydx$?

Aufgabe 5. Konstuiere auf S^3 eine differenzierbare 1-Differentialform ω mit $\omega_p \neq 0, p \in S^3$. Kann ω die Bedingung $d\omega = 0$ erfüllen?

Aufgabe 6. Kann für ein $n > 1$ auf S^n eine differenzierbare 1-Differentialform ω mit $\omega_p \neq 0, p \in S^n$ und $d\omega = 0$ existieren?

Aufgabe 7. Sei V ein reeller Vektorraum endlicher Dimension $n > 1$. Sei $. : V \times V \to V$ eine kommutative bilineare Multiplikation, derart dass $(V, +, .)$ ein Körper ist. Für $v \in V$ sei $M_v : V \to V$ die Abbildung $x \in V \mapsto v.x \in V$. Zeige, dass $S := \{v \in V \mid \text{Determinante}(M_v) = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Sphäre ist.

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Wähle eine von $(D\text{Determinante})_{1_V}$ linear unabhängige Linearform $L : V \to \mathbb{R}$. Setze $\eta_p(v) = L(M_p(v)), p \in S, v \in V$. Zeige, dass η eine differenzierbare 1-Differentialform ω auf S definiert. Zeige: $\omega_p \neq 0, p \in S$ und $d\omega = 0$. Schliesse $n = 2$ und der Körper $(V, +, .)$ ist isomorph zu $\mathbb{C}$.