Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Analysis und Geometrie I.

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei F eine abgeschlossene Teilmenge einer offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$. Konstruiere eine differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$ derart, dass $f^{-1}(0) = F$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $F = \{p \in \mathbb{R}^n \mid x_1(p)^2 + \cdots + x_n(p)^2 = 1\}$. Gibt es eine diffenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derart, dass $F = \{p \in \mathbb{R}^n \mid (Df)_p = 0\}$ gilt?

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^6$ die Abbildung $f(p) =$

$$\frac{1}{x_1(p)^2 + x_2(p)^2 + x_3(p)^2}(x_1(p)^2, x_2(p)^2, x_3(p)^2, x_1(p)x_2(p), x_1(p)x_3(p), x_2(p)x_3(p))$$

Zeige, dass Bild(f) homöomorph zur reellen projektiven Ebene ist.

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Gibt es eine differenzierbare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^4$ derart, dass $g^{-1}(0) = \text{Bild}(f)$ gilt? Kann man g so wählen, dass für $p \in \text{Bild}(f)$ dass Differential $(Dg)_p$ von Rang 4 ist?

Aufgabe 5. Sei $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit $X_p = p$ für $x_1(p)^2 + \cdots + x_n(p)^n = 1$. Zeige, dass X eine Nullstelle hat.