Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/05

# Übungen zur Vorlesung Analysis und Geometrie I.

10. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1**. Sei $\gamma : [0,1] \to E$ eine differenzierbare Kurve in der Euklidischen Ebene $E$. Sei $N \in \mathbb{N}, N > 0$. Für $t \in [0,1]$, sei $\epsilon_t := \frac{1/N}{||\dot\gamma(t)||+1}$. Sei $\delta_t \in \mathbb{R}, \delta > 0$, so gewählt, dass für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $t+h \in [0,1]$ und $|h| \leq \delta_t$ gilt: $||\gamma(t+h) - \gamma(t) - h\dot\gamma(t)|| \leq \epsilon_t |h|$. Sei $I_t := ]t-\delta_t, t+\delta_t[ \cap [0,1]$. Sei $J_t \subset I_t$ ein Segment. Zeige, dass das $\gamma(J_t)$ in ein Rechteck mit Oberfläche $\frac{\text{Länge}(J_t)}{N}$ liegt.

**Aufgabe 2**. (Fortsetzung). Wähle endliche viele $t_1, t_2, \cdots, t_n$ in $[0,1]$ und wähle Segmente $J_{t_i}, 1 \leq i \leq n$ mit $t_i \in J_{t_i} \subset I_{t_i}$ derart, dass die Segmente $J_{t_1}, J_{t_2}, \cdots, J_{t_n}$ das Segment $[0,1]$ überdecken und zwar so, dass Durchschnitte $J_{t_i} \cap J_{t_j} \cap J_{t_k}, 1 \leq i < j < k \leq n$, leer sind. Zeige, dass $\gamma([0,1])$ sich mit $n$ Rechtecke mit Gesamtoberfläche $\frac{2}{N}$ überdecken lässt.

**Aufgabe 3**. Zeige, dass $\gamma([0,1])$ eine Jordansche Nullmenge in $E$ ist.

**Aufgabe 4**. Die Annahme für eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar zu sein schliesst folgendes für seine Ableitung $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$ nicht aus: jeder der drei Teilmengen $A_+ := \{t \in [0,1] \mid f'(t) > 0\}, A_- := \{t \in [0,1] \mid f'(t) < 0\}, A_0 := \{t \in [0,1] \mid f'(t) = 0\}$ ist dicht in $[0,1]$. Siehe, *A second course on real functions*, A.C.M van Rooij & W.H Schikhof, 1982, Cambridge University Press.

**Aufgabe 5**. (Fortsetzung). Zeige, dass man $f$ aus $f'$ und $f(0)$ rekonstruieren kann. Gebe, wenn möglich auch ein Verfahren an.

**Aufgabe 6**. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, d > 1$, eine differenzierbare Kurve. Zeige, dass dass topologische Innere von $\gamma(\mathbb{R})$ leer ist.

**Aufgabe 7**. Sei $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d, d > n$, differenzierbar. Zeige, dass dass topologische Innere von $\gamma(\mathbb{R}^n)$ leer ist.