Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Analysis und Geometrie I.
1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Die Erdkugel wird von 4 Sonnen angestrahlt. Jede Sonne leuchtet einen Halbkugel aus. Wir nehmen an, dass die Lotpunkte der Sonnen auf der Erdkugel unaghängig verteilt sind. Wir nehmen an, dass die Verteilungen der Lotpunkte durch eine stetige, bezüglich des Erdmittelpunktes punktsymmetrische Dichte gegeben sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die ganze Erdkugel ausgeleuchtet?

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Nun mit $N, N > 3$, Sonnen oder GPS-Satelliten?

Aufgabe 3. Die Ebenen $E_n := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid x(p) = 1/n\}, n = 1, 2, 3 \cdots,$ werden aus $\mathbb{R}^3$ entfernt. Das Komplement ist nicht zusammenhängend. Wir bohren in jeder Ebene E_n ein Loch an der Stelle p_n, d.h. wir entfernen aus E_n die Teilmenge $p \in E_n \mid (y(p) - y(p_n))^2 + (z(p) - z(p_n))^2 < 1\}$. Das Komplement der Vereinigung der gelochten Ebenen bildet einen Filter S_P, der von der Wahl der Lochzentren $P = (p_1, p_2, \cdots)$ abhängt. Wir fragen nach der Anzahl Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten von S_P. Diese Frage wird für die folgenden Fälle gestelt:

- die Folge $(p_n)_n \in \mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}^3$ konvergent,

- die Folge $(p_n)_n \in \mathbb{N}$ ist nicht konvergent, hat aber genau einen Häufungspunkt,

- es gilt $p_n = (1/n, 0, (-1)^n a)$ mit $0 < a < 1$ oder $a = 1$ oder $a > 1$,

- die Folge hat in $\mathbb{R}^3$ keinen Häufungspunkt,

- es gilt $p_n = (1/n, 0, \pm 1)$,

- mit dem Kopf- oder Zahlverfahren wird $p_n = (1/n, 0, \pm 1)$ gewählt,

- es gilt $p_{n+1} - p_n = (1/n + 1 - 1/n, 0, \pm 2)$, und $z(p_{n+1}) - z(p_n)$ nimmt mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte ± 2 an,

- es gilt $p_{n+1} - p_n = (1/n+1-1/n, \pm 2, \pm 2)$ und $(y(p_{n+1}) - y(p_n), z(p_{n+1}) - z(p_n))$ nimmt mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte $(\pm 2, \pm 2)$ an.