Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

# Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen
## in Topologie und Geometrie
## 3. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1**. Seien $H_1$, $H_2$ Hilberträume und sei $P : H_1 \to H_2$ ein Fredholmoperator. Konstruiere einen Fredholmoperator $Q : H_2 \to H_1$, sodass $Q \circ P - \mathbf{Id}_{H_1}$ die orthogonale Projektion $p : H_1 \to H_1$ von $H_1$ auf Kern$(P)$ ist. Berechne $P \circ Q - \mathbf{Id}_{H_2}$.

**Aufgabe 2**. Seien $H_1$, $H_2$ Hilberträume und seien $P : H_1 \to H_2$ und $Q : H_2 \to H_1$ lineare stetige Abbildungen, sodass $Q \circ P - \mathbf{Id}_{H_1} : H_1 \to H_2$ und $P \circ Q - \mathbf{Id}_{H_2} : H_2 \to H_1$ kompakt sind. Zeige, dass $P$, $Q$ Fredholmoperatoren sind.

**Aufgabe 3**. Sei $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \cdots)_{n \in \mathbf{N}}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum $H$. Zeige, dass genau eine lineare stetige Abbildung $P : H \to H$ mit $P(e_n) = \sin(n) e_n, n \in \mathbf{N}$, existiert.

**Aufgabe 4**. Ist $P$ aus Aufgabe 3 ein Fredholmoperator?

**Aufgabe 5**. Für $t \in \mathbf{R}$ sei $P_t : H \to H$ die lineare stetige Abbildung mit $P_t(e_n) = (t + \sin(n)) e_n, n \in \mathbf{N}$. Für welche $t \in \mathbf{R}$ ist $P_t$ ein Fredholmoperator?

**Aufgabe 6**. Sei $T : H \to H$ die lineare stetige Abbildung mit $T(e_n) = e_n + \frac{1}{n} e_{n^2}, n \in \mathbf{N}$. Ist $T$ ein Fredholmoperator?

**Aufgabe 7**. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Sei $CF(X)$ die Menge aller Cauchy-Folgen in $X$. Zwei Cauchy-Folgen $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in $X$ heissen äquivalent, wenn die Zahlenfolge $(d(a_n, b_n))_{n \in \mathbf{N}}$ eine Nullfolge ist. Sei $\hat{X}$ die Menge der Äquivalenzklassen in $CF(X)$. Für $A, B \in \hat{X}$, repräsentiert durch Cauchy-Folgen $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$, erklären wir $\hat{d}(A, B) := \lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n)$. Zeige, dass $\hat{d}$ auf $\hat{X}$ eine Metrik definiert, und dass $(\hat{X}, \hat{d})$ ein vollständiger metrischer Raum ist. Zeige, dass $X$ zu einem dichten Unterraum in $\hat{X}$ wird, wenn man Elemente $x \in X$ mit konstanten Folgen in $X$ identifiziert.

**Aufgabe 8**. Seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine gleichmässig stetige Abbildung. Zeige, dass die Abbildung $f$ sich zu einer stetigen Abbildung $f : \hat{X} \to Y$ fortsetzen lässt, wenn der Raum $(Y, d_Y)$ vollständig ist.

**Aufgabe 9**. Sei $p \in \mathbf{N}$ eine Primzahl. Für $a \in \mathbf{Z}$ sei $v_p(a) := \sup\{i \in \mathbf{N} \mid p^{-i} a \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Für $a/b \in \mathbf{Q}, a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$, sei $||a/b||_p := p^{v_p(b) - v_p(a)} \in \mathbf{Q}$. Sei $d_p : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ die Abbildung $d_p(a/b, u/v) = ||a/b - u/v||_p$. Zeige, dass $(\mathbf{Q}, d_p)$ ein metrischer Raum ist. Sei $\mathbf{Q}_p$ die Vervollständigung von $(\mathbf{Q}, d_p)$. Zeige, dass $\mathbf{Q}_p$ ein lokal kompakter Körper ist. Sind die Körper $\mathbf{Q}_2$ und $\mathbf{Q}_3$ isomorph?

**Aufgabe 10**. Kann man den Körper $Q_2$ stetig in $\mathbf{C}$ einbetten? Ist der Körper $Q_2$ isomorph zu einem Unterkörper in $\mathbf{C}$?

**Aufgabe 11**. Zeige, dass die Gleichung

$$\log(\frac{A(x)}{x}) = \sum_{k\geq 1} \frac{A(x^k)}{k}$$

eindeutig eine Potenzreihe $A(x) = x + \sum_{i\geq 2} a_i x^i$ bestimmt. Interessant ist, dass der Koeffizient $a_i, i = 1, 2, \cdots$, die Anzahl der Bäume mit $i$ Knoten und einem Wurzelknoten angibt.

**Aufgabe 12**. Sei $(E, || \, ||_E)$ ein zweidimensionaler reeller Banachraum, so dass es unendlich viele linearen Abbildungen $f : E \to E$ mit $||f(u)||_E = ||u||_E, u \in E$ gibt. Zeige, dass die Norm $|| \, ||_E$ von einem Skalarprodukt her kommt.

**Aufgabe 13**. Sei $(V, || \, ||_V)$ ein reeller Banachraum, so dass für jeden zweidimensionalen Unterraum $E \subset V$ die Einschränkung von $|| \, ||_V$ auf $E$ von einem Skalarprodukt auf $E$ her kommt. Zeige, dass die Norm $|| \, ||_V$ von einem Skalarprodukt her kommt.

**Aufgabe 14**. Sei $E$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Konstruiere auf $E$ eine Norm, so dass es genau zwei lineare Abbildungen $f : E \to E$ mit $||f(u)||_E = ||u||_E, u \in E$ gibt.

**Aufgabe 15**. Sei $M := \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. Ist der Laplaceoperator $\Delta : C^2(M) \to C^0(M)$ ein Fredholmoperator?